

## Tema 5

# Circuitos de Corriente Alterna

---

### 5.1. Introducción

Dado que en el Tema 4 se han establecido algunas de las leyes físicas que rigen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético cuando éstos son variables en el tiempo, en el presente capítulo estamos ya preparados para tratar circuitos con corriente variable en el tiempo y así extender los conceptos de circuitos de corriente continua (Tema 2) al caso de circuitos de corriente variable en el tiempo.

Entre las posibles dependencias temporales de la corriente,  $I(t)$ , en este tema estudiaremos únicamente aquélla cuya variación es *armónica*, esto es, del tipo

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (5.1)$$

(ver Apéndice B para una descripción de las funciones armónicas). Las razones fundamentales para estudiar este tipo de corriente variable en el tiempo, denominada de forma genérica **corriente alterna**, son dos:

#### 1. Relevancia tecnológica.

Desde un punto de vista tecnológico, el uso de la corriente alterna es muy conveniente debido a que ésta es muy fácil de generar y su transporte puede realizarse fácilmente a altas tensiones (y pequeñas intensidades) minimizando así las pérdidas por efecto Joule (posteriormente, por inducción electromagnética, la corriente alterna puede fácilmente transformarse a las tensiones usuales de trabajo). Estas características junto con su fácil aplicación para motores eléctricos hizo que, a partir de finales del siglo XIX, la corriente alterna se impusiera para uso doméstico e industrial y que, por tanto, la tecnología eléctrica se haya desarrollado en torno a esta forma de corriente (en Europa la frecuencia de la corriente alterna es de 50 Hz). Una característica adicional de esta corriente es que su forma armónica se conserva cuando la corriente es modificada por el efecto de elementos lineales, a saber: resistencias, condensadores, bobinas, transformadores, etc.

## 2. Relevancia matemática.

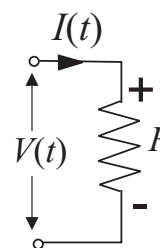
Debido a que cualquier función periódica puede expresarse como la suma de diferentes armónicos (teorema de Fourier), el estudio de la corriente alterna constituye la base para el análisis de señales variables en el tiempo en redes lineales.

## 5.2. Relación $I \leftrightarrow V$ para Resistencia, Condensador y Bobina

### ■ Resistencia.

Según se discutió en el Apartado 2.3.2, en corriente continua la relación que existía entre la caída de potencial  $V$  y la intensidad  $I$  en una resistencia caracterizada por  $R$  venía dada por la ley de Ohm, esto es,  $V = RI$ . Experimentalmente puede verificarse que la ley de Ohm sigue siendo válida para corrientes alternas y, por tanto, puede escribirse que<sup>1</sup>

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} . \quad (5.2)$$



### ■ Condensador.

En la expresión (1.57) se definió la capacidad  $C$  de un condensador como la relación entre la carga  $Q$  de las placas y la caída de potencial  $V$  entre éstas, esto es,

$$C = \frac{Q}{V} . \quad (5.3)$$

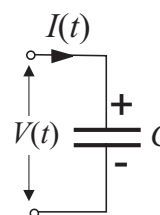
Esta relación se cumple igualmente para corrientes alternas, de donde puede deducirse que la carga variable en el tiempo,  $Q(t)$ , puede escribirse como

$$Q(t) = CV(t) . \quad (5.4)$$

Al derivar la expresión anterior respecto al tiempo obtenemos la siguiente relación entre la intensidad  $I(t)$  y la caída de potencial entre las placas  $V(t)$ :

$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt} . \quad (5.5)$$

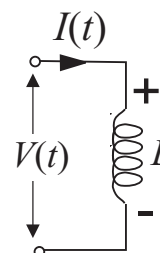
Esta relación indica que la *derivada temporal* de la caída de potencial entre las placas está relacionada linealmente mediante el parámetro  $C$  con la intensidad que llega al condensador.



### ■ Bobina.

Tal y como se expresó en (4.42), el efecto de autoinducción electromagnética de una bobina caracterizada por una inductancia  $L$  y recorrida por una intensidad  $I(t)$  podía considerarse como una caída de potencial en la bobina,  $V(t)$ , dada por

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} . \quad (5.6)$$



<sup>1</sup>Los signos más y menos en la resistencia y en otros elementos en los circuitos de corriente alterna indican los puntos de potencial más alto y más bajo en dichos elementos cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la correspondiente figura.

La bobina puede considerarse, por tanto, como un elemento de circuito que relaciona linealmente, mediante el parámetro  $L$ , la derivada temporal de la intensidad que circula por ella con la caída de potencial en la misma.

### 5.3. Generador de fem alterna

Anteriormente se ha señalado que una de las propiedades más destacadas y que hacen más útiles el uso de la corriente alterna es su fácil generación. El generador de fem alterna basa su funcionamiento en la ley de inducción electromagnética de Faraday (ver Apartado 4.2.2), transformando energía mecánica en energía electromagnética (en una forma opuesta a lo que hace el motor eléctrico, ver Apartado 3.3.2). Un esquema básico de un generador de fem alterna se muestra en la figura 5.1, donde podemos observar que el flujo magnético que atraviesa la espira giratoria

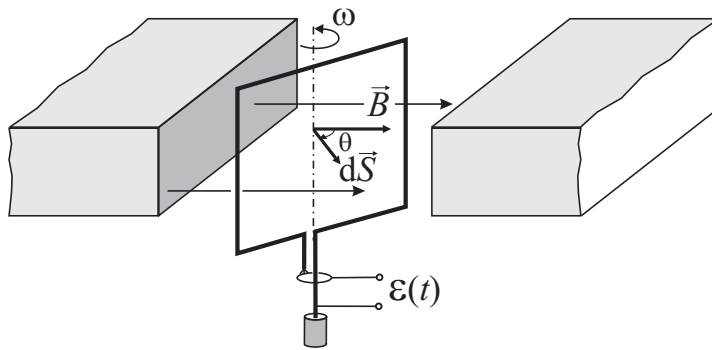


Figura 5.1: Esquema básico de un generador de fuerza electromotriz alterna.

viene dado por

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \theta, \quad (5.7)$$

donde se ha supuesto que el campo magnético es uniforme en la región donde se mueve la espira.

Si el movimiento que se le imprime a la espira es un *movimiento angular uniforme* caracterizado por una velocidad angular  $\omega$  constante (como por ejemplo el que produciría un chorro de vapor constante dirigido a unas aspas conectadas con la espira), dado que  $\theta = \omega t + \theta_0$ , el flujo magnético que atraviesa la espira puede expresarse como

$$\Phi(t) = BS \cos(\omega t + \theta_0). \quad (5.8)$$

Haciendo uso de la ley de inducción de Faraday (4.17), la fem  $\mathcal{E}(t)$  inducida en un conjunto de  $N$  espiras similares a la de la figura anterior será

$$\mathcal{E}(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t + \theta_0), \quad (5.9)$$

esto es, se ha generado una fem alterna que puede expresarse en general como

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta), \quad (5.10)$$

donde, en el presente caso,  $\mathcal{E}_0 = NBS\omega$  y  $\delta = \theta_0 - \pi/2$ .

## 5.4. Valores eficaces

El valor eficaz,  $I_{\text{ef}}$ , de una corriente alterna,

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) , \quad (5.11)$$

se define como la raíz cuadrada del valor cuadrático medio  $\langle I^2(t) \rangle$  de la corriente, es decir,

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} , \quad (5.12)$$

donde el valor medio de una función periódica,  $f(t)$ , de periodo  $T$  se define como

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt . \quad (5.13)$$

El valor eficaz de la corriente, al igual que otras magnitudes circuitales que varíen armónicamente, tiene mucha importancia práctica dado que el valor que miden los polímetros analógicos es precisamente el valor eficaz. Siguiendo la definición (5.12) y teniendo en cuenta (5.13) se tiene que

$$I_{\text{ef}}^2 = \langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt = \frac{I_0^2}{2} ,$$

por lo que el valor eficaz se relaciona con la amplitud,  $I_0$ , de la corriente mediante la siguiente expresión:

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} . \quad (5.14)$$

Valor eficaz de la corriente alterna

Análogamente, el valor eficaz de cualquier otra magnitud que varíe armónicamente en el tiempo se define como la amplitud de dicha magnitud dividida por  $\sqrt{2}$ .

Es interesante observar que el valor eficaz,  $I_{\text{ef}}$ , de una corriente alterna,  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$ , que recorre una resistencia  $R$  es justamente el valor de la intensidad de la corriente *continua* que produce el mismo efecto Joule durante un periodo de tiempo  $T$ . La energía  $W_{\text{CA}}$  disipada por efecto Joule en una resistencia  $R$  por una corriente alterna durante un periodo de tiempo  $T$  puede calcularse como

$$W_{\text{CA}} = \int_0^T P(t) dt , \quad (5.15)$$

donde  $P(t)$  es la *potencia instantánea* disipada en la resistencia, que viene dada por el producto de la intensidad por la tensión, esto es:

$$P(t) = I(t)V(t) . \quad (5.16)$$

Dado que según (5.2) la caída de potencial en la resistencia es  $V(t) = RI(t)$ , la energía disipada por la corriente *alterna* en esta resistencia puede escribirse como

$$W_{\text{CA}} = I_0^2 R \int_0^T \cos^2(\omega t + \delta) dt = I_0^2 R \frac{T}{2} = I_{\text{ef}}^2 RT , \quad (5.17)$$

que es precisamente el valor de la energía disipada por efecto Joule durante un periodo de tiempo  $T$  en dicha resistencia  $R$  si ésta fuese recorrida por una corriente *continua* de valor  $I_{\text{ef}}$ , esto es,

$$W_{\text{CC}} = I_{\text{ef}}^2 RT . \quad (5.18)$$

## 5.5. Análisis fasorial de circuitos de CA

Dado que el estudio de la corriente alterna implica el tratamiento de funciones con una dependencia temporal de tipo armónica, la introducción de los **fasores** asociados a estas funciones simplificará enormemente el cálculo matemático necesario. Tal y como se explica en el Apéndice B.2, a una función armónica  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$  se le hace corresponder un fasor  $\tilde{I}$ :

$$I(t) \leftrightarrow \tilde{I} ,$$

que viene dado por

$$\tilde{I} = I_0 e^{j\delta} , \quad (5.19)$$

de modo que

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}) . \quad (5.20)$$

Fasor  $\tilde{I}$  asociado a  
 $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$

Las propiedades básicas de los fasores se discuten en el Apéndice B.2, donde también se muestra que una propiedad muy útil para el presente tema es la que relaciona la derivada temporal de una función armónica con su fasor asociado, esto es,

$$\frac{dI(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{I} . \quad (5.21)$$

### 5.5.1. Expresiones fasoriales para resistencia, condensador y bobina

Haciendo uso de las relaciones fasoriales apropiadas es posible expresar las relaciones fundamentales para resistencias, condensadores y bobinas en la siguiente forma:

#### ■ Resistencia.

La relación (5.2) puede expresarse en forma fasorial simplemente como

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{R} , \quad (5.22)$$

o bien como

$$\tilde{V} = R \tilde{I} . \quad (5.23)$$

#### ■ Condensador.

Para el condensador, haciendo uso de la propiedad (5.21), la relación (5.5) puede expresarse como

$$\tilde{I} = j\omega C \tilde{V} , \quad (5.24)$$

o equivalentemente

$$\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C} \tilde{I} . \quad (5.25)$$

La expresión anterior suele también escribirse como

$$\tilde{V} = -jX_C \tilde{I} , \quad (5.26)$$

donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (5.27)$$

se denomina **reactancia capacitiva** y se expresa en ohmios ( $\Omega$ ). Esta magnitud *depende* de la frecuencia tendiendo a cero para frecuencias muy altas y a infinito para frecuencias muy bajas. Esto se manifiesta en el hecho de que para frecuencias bajas el condensador se comporta como un elemento que apenas deja fluir la corriente mientras que a frecuencias altas casi no impide la circulación de la corriente.

#### ■ Bobina.

La relación (5.21) para la bobina puede expresarse en forma fasorial como

$$\tilde{V} = j\omega L \tilde{I} . \quad (5.28)$$

Si se define la **reactancia inductiva**,  $X_L$ , como

$$X_L = \omega L , \quad (5.29)$$

la expresión fasorial (5.28) puede también escribirse como

$$\tilde{V} = jX_L \tilde{I} . \quad (5.30)$$

La reactancia inductiva viene dada en ohmios y es un parámetro que *depende* linealmente con la frecuencia, de modo que tiende a cero para frecuencias bajas y a infinito para frecuencias altas. Podemos afirmar entonces que la bobina se comporta como un elemento que se opondría al paso de la corriente a medida que la frecuencia de ésta aumenta.

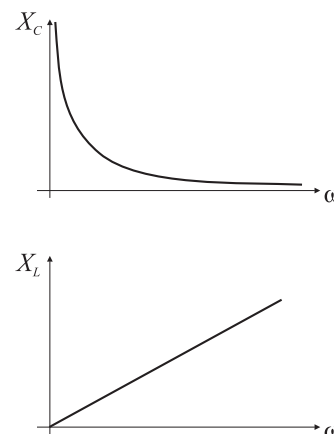
Es interesante observar que las relaciones tensión/intensidad <sup>2</sup> para el condensador y la bobina fueron expresadas en el Apartado 5.2 mediante expresiones *diferenciales* han podido ser ahora reescritas como simples expresiones *algebraicas* mediante el uso de sus fasores asociados. Es más, se ha encontrado que el fasor  $\tilde{V}$  siempre puede relacionarse linealmente con el fasor  $\tilde{I}$  mediante un parámetro genérico  $Z$ ,

$$\tilde{V} = Z \tilde{I} , \quad (5.31)$$

que denominaremos **impedancia** y que, en general, es un número complejo (notar que no es un fasor) que toma los siguientes valores para el caso de resistencias, condensadores y bobinas:

$$Z = \begin{cases} R & \text{Resistencia} \\ -jX_C & \text{Condensador} \\ jX_L & \text{Bobina} . \end{cases} \quad (5.32)$$

Impedancia de una resistencia, condensador y bobina



### 5.5.2. Reglas de Kirchhoff

Las reglas de Kirchhoff junto con las relaciones tensión/intensidad en los distintos elementos que constituyen los circuitos nos permitirán determinar el comportamiento de las magnitudes eléctricas en corriente alterna. Las reglas de Kirchhoff fueron introducidas en el Capítulo 2 para

<sup>2</sup>Recordemos que **tensión** es sinónimo de **diferencia de potencial** y de **voltaje**.

los circuitos de corriente continua, donde suponíamos que se había establecido una situación estacionaria (es decir, las magnitudes no variaban en el tiempo). En los circuitos de corriente alterna supondremos que las reglas de Kirchhoff siguen siendo válidas para cada instante de tiempo<sup>3</sup>. En consecuencia podemos expresar las reglas de Kirchhoff de la siguiente manera:

► Regla de Kirchhoff para la tensión:

$$V_{12}(t) = \sum_j V_j(t) - \sum_i \mathcal{E}_i(t) , \quad (5.33)$$

donde  $V_j(t)$  es la caída de potencial en el elemento  $j$ -ésimo y  $\mathcal{E}_i(t)$  es la  $i$ -ésima fem del recorrido.

En el ejemplo mostrado en la figura adjunta, la regla (5.33) nos dice que

$$V_{12}(t) = [V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)] - [-\mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t)] .$$

► Regla de Kirchhoff para las intensidades:

$$\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0 , \quad (5.34)$$

esto es, en cada instante de tiempo, la suma de todas las intensidades que llegan y salen de un nudo es cero.

Las anteriores reglas pueden también expresarse en forma fasorial, adoptando entonces la siguiente forma:

■ Regla de Kirchhoff fasorial para la tensión

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j \tilde{V}_j - \sum_i \tilde{\mathcal{E}}_i , \quad (5.35)$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{V}_{12} = \sum_j Z_j \tilde{I}_j - \sum_i \tilde{\mathcal{E}}_i , \quad (5.36)$$

donde  $Z_j$  es la impedancia del elemento  $j$ -ésimo recorrido por la intensidad fasorial  $\tilde{I}_j$ . En el ejemplo de la figura (siguiendo los criterios de signos ya explicados para los circuitos de corriente continua), al aplicar (5.36) obtenemos

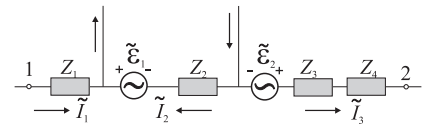
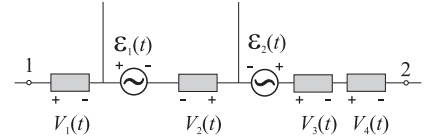
$$\tilde{V}_{12} = Z_1 \tilde{I}_1 - Z_2 \tilde{I}_2 + (Z_3 + Z_4) \tilde{I}_3 - [-\tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2] .$$

■ Regla de Kirchhoff fasorial para las intensidades

$$\sum_{i=1}^N \tilde{I}_i = 0 , \quad (5.37)$$

es decir, la suma de todas las intensidades fasoriales que llegan y salen de un nudo es cero.

<sup>3</sup>Básicamente estamos admitiendo que en cada instante de tiempo se alcanza una situación estacionaria.



### 5.5.3. Circuito RLC serie

Debemos observar que las reglas de Kirchhoff tal como han sido establecidas en (5.36) y (5.37) son “idénticas” a las reglas (2.34) y (2.35) establecidas para corriente continua, considerando que ahora tenemos fasores e impedancias en vez de números reales y resistencias. Como un ejemplo sencillo de aplicación de las leyes de Kirchhoff fasoriales consideraremos a continuación un circuito RLC serie en corriente alterna.

Si el generador de fem alterna proporciona una  $\mathcal{E}$  dada por

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta_{\mathcal{E}}), \quad (5.38)$$

cuyo fasor asociado es

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{j\delta_{\mathcal{E}}}, \quad (5.39)$$

al aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones (5.33) al circuito de la figura tendremos que

$$\mathcal{E}(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t), \quad (5.40)$$

o bien en forma fasorial:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{V}_R + \tilde{V}_C + \tilde{V}_L. \quad (5.41)$$

Teniendo ahora en cuenta las expresiones fasoriales (5.23), (5.26) y (5.30), se tiene que

$$\tilde{\mathcal{E}} = [R + j(X_L - X_C)] \tilde{I} \quad (5.42)$$

$$= Z \tilde{I}, \quad (5.43)$$

donde la impedancia,  $Z$ , del circuito RLC serie será

$$Z = R + j(X_L - X_C), \quad (5.44)$$

esto es, la suma de las impedancias de cada uno de los elementos del circuito. Esta impedancia puede también expresarse en forma módulo y argumento como

$$Z = |Z| e^{j\delta_Z} \quad (5.45)$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (5.46)$$

y

$$\delta_Z = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (5.47)$$

Despejando en la expresión (5.43), el fasor intensidad puede calcularse como

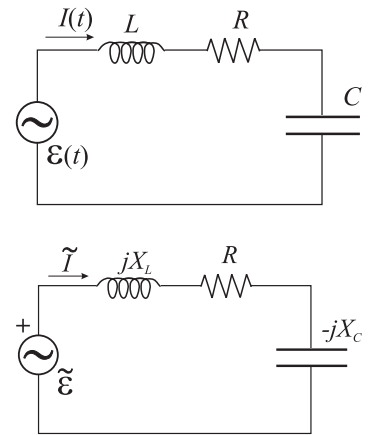
$$\tilde{I} = I_0 e^{j\delta_I} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{Z}. \quad (5.48)$$

Sustituyendo ahora (5.39) y (5.45) en la expresión anterior,  $\tilde{I}$  puede reescribirse como

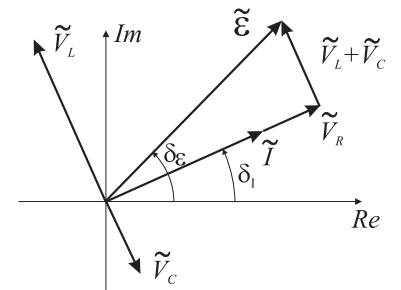
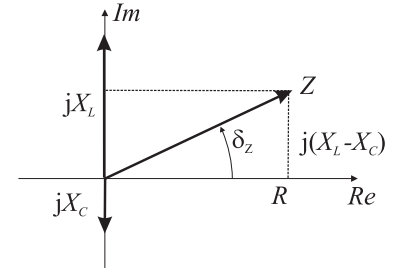
$$\tilde{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} e^{j(\delta_{\mathcal{E}} - \delta_I)},$$

de donde concluimos que la amplitud y fase del fasor intensidad vienen dados por

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (5.49)$$



Impedancia de un circuito serie RLC



y

$$\delta = \delta_{\mathcal{E}} - \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (5.50)$$

Obviamente, la expresión temporal de la intensidad puede obtenerse al sustituir las expresiones anteriores para  $I_0$  y  $\delta$  en  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$ .

### Resonancia

Si la amplitud de la intensidad para el circuito serie RLC, según se ha obtenido en (5.49), se expresa explícitamente como una función de la frecuencia, obtendríamos que

$$I_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5.51)$$

o, equivalentemente,

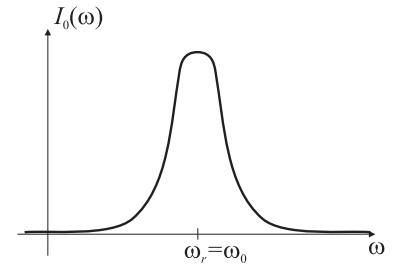
$$I_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}}. \quad (5.52)$$

Definiendo la frecuencia  $\omega_0$  como

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (5.53)$$

podemos reescribir (5.52) como

$$I_0(\omega) = \frac{\omega \mathcal{E}_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}, \quad (5.54)$$



donde puede observarse que la amplitud de la intensidad en el circuito serie RLC depende claramente de la frecuencia y presenta un máximo absoluto para un valor de frecuencia  $\omega = \omega_0$ . Este fenómeno se conoce en general como *resonancia* y aparece en múltiples situaciones prácticas (por ejemplo, en los osciladores forzados). La frecuencia,  $\omega_r$ , a la que aparece el máximo de amplitud recibe el nombre de **frecuencia de resonancia**, siendo para el circuito serie RLC:  $\omega_r = \omega_0$ ; cumpliéndose además a esta frecuencia que  $X_L = X_C$ , por lo que, según (5.47), la impedancia es puramente real. Los fenómenos de resonancia tienen múltiples aplicaciones prácticas; por ejemplo, si el circuito serie RLC se utiliza como el circuito de sintonía de una radio, la capacidad del condensador puede variarse de modo que la frecuencia de resonancia vaya cambiando, sintonizándose así las diferentes emisoras (esto es, la emisora que emita con frecuencia igual a la de resonancia es la que se recibiría con más intensidad).

#### 5.5.4. Análisis de mallas

La resolución del circuito RLC serie en corriente alterna ha puesto de manifiesto que mediante el uso de los fasores y de la impedancia asociada a cada elemento, la resolución de un circuito de corriente alterna es

equivalente a la de uno de corriente continua en la que las magnitudes intensidad y tensión son ahora fasores y las impedancias juegan el papel de resistencias. De este modo, todas las técnicas introducidas en el Capítulo 2 para la resolución de circuitos de corriente continua pueden ser ahora aplicadas a la resolución de circuitos de corriente alterna, teniendo en cuenta las equivalencias antes mencionadas.

Como ejemplo, un circuito como el mostrado en la Figura 5.2 puede

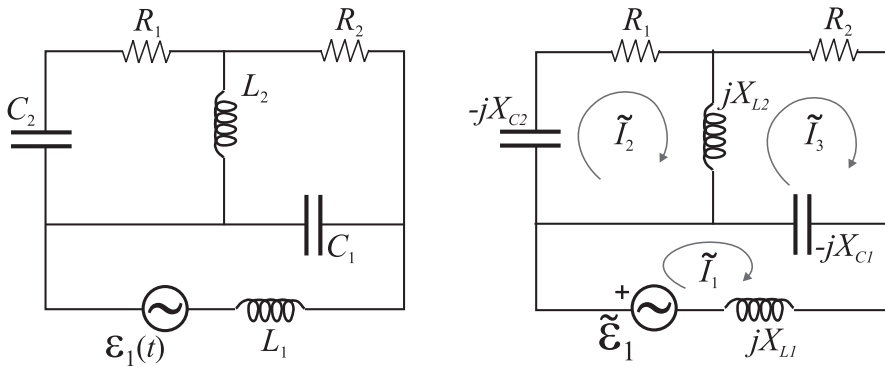


Figura 5.2: Circuito de tres mallas

resolverse mediante la aplicación del método de las corrientes de mallas. Definiendo los fasores intensidades de malla en cada una de las tres mallas del circuito según se muestra en la figura y teniendo en cuenta el valor de las impedancias de cada uno de los elementos implicados, la ecuación para las intensidades de malla puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [Z_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_3 \end{bmatrix},$$

donde la matriz de impedancias viene dada por

$$[Z_{ij}] = \begin{bmatrix} j(X_{L1} - X_{C1}) & 0 & jX_{C1} \\ 0 & R_1 + j(X_{L2} - X_{C2}) & -jX_{L2} \\ jX_{C1} & -jX_{L2} & R_2 + j(X_{L2} - X_{C1}) \end{bmatrix}.$$

Para los cálculos en los ejercicios es siempre conveniente trabajar con números sustituyendo las expresiones algebraicas por sus valores numéricos concretos antes de resolver el correspondiente sistema de ecuaciones.

**Ejemplo 5.1** En el circuito de la figura, determine las intensidades fasoriales,  $\tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2$  e  $\tilde{I}_3$  y las instantáneas,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ .

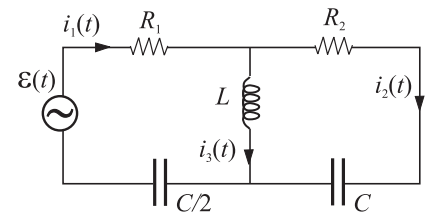
Datos:  $\mathcal{E}(t) = 20 \sin(4 \times 10^4 t) \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ mH}$  y  $C = 3,125 \mu\text{F}$ .

Lo primero que debemos hacer es obtener los fasores fuerza electromotriz y las impedancias de cada elemento. Dado que la fuente proporciona una fem de valor

$$\mathcal{E}(t) = 20 \sin(4 \times 10^4 t) \text{ V} = 20 \cos(4 \times 10^4 t - \pi/2) \text{ V},$$

de aquí obtenemos que la frecuencia angular,  $\omega$ , de la fuente es

$$\omega = 4 \times 10^4 \text{ rad/s}$$



y su correspondiente fasor asociado es

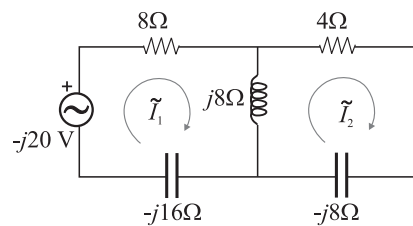
$$\tilde{\mathcal{E}} = 20e^{-j\pi/2} = -j20 \text{ V}.$$

Para obtener las impedancias de la bobina y los condensadores, debemos calcular primero las reactancias inductivas y capacitivas, esto es,

$$X_L = \omega L = 4 \times 10^4 \cdot 2 \times 10^{-4} = 8\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \times 10^4 \cdot 3,125 \times 10^{-6}} = 8\Omega,$$

por lo que el circuito equivalente que debemos resolver es el mostrado en la figura adjunta.



Las ecuaciones para las intensidades fasoriales de malla,  $\tilde{I}_1$  e  $\tilde{I}_2$ , son

$$\begin{bmatrix} -j20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - j8 & -j8 \\ -j8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix},$$

o bien simplificando al dividir por 4:

$$\begin{bmatrix} -j5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - j2 & -j2 \\ -j2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Las intensidades de mallas pueden ahora calcularse usando, por ejemplo, el método de sustitución. Así de la segunda ecuación obtenemos

$$\tilde{I}_2 = 2j\tilde{I}_1,$$

que al sustituir en la primera ecuación, nos lleva a que

$$-j5 = (2 - j2)\tilde{I}_1 - j2j2\tilde{I}_1 = (2 - j2 + 4)\tilde{I}_1 = (6 - j2)\tilde{I}_1.$$

Despejando tenemos que

$$\tilde{I}_1 = \frac{-j5}{6 - j2} = \frac{-j5(6 + j2)}{(6 - j2)(6 + j2)} = \frac{-j5(6 + j2)}{5 \cdot 8} = \frac{-j6 + 2}{8} = \frac{1 - j3}{4}$$

y sustituyendo ahora este valor para obtener  $\tilde{I}_2$ , obtenemos

$$\tilde{I}_2 = \frac{2j(1 - j3)}{2 \cdot 2} = \frac{3 + j}{2}.$$

Para calcular ahora el fasor  $\tilde{I}_3$ , asociado a  $i_3(t)$ , debemos tener en cuenta que

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2,$$

por lo que

$$\tilde{I}_3 = \frac{1 - j3}{4} - \frac{3 + j}{2} = \frac{1 - j3 - 6 - j2}{4} = \frac{-5 - j5}{4}.$$

Antes de obtener las expresiones de las intensidades instantáneas es conveniente expresar los fasores anteriores en forma módulo y argumento:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= \frac{\sqrt{10}}{4} e^{j \arctan(-3)} = \frac{\sqrt{10}}{4} e^{-j1,249} \\ \tilde{I}_2 &= \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j \arctan(1/3)} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j0,291} \\ \tilde{I}_3 &= \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j \arctan(-1/-1)} = \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j5\pi/4} .\end{aligned}$$

(Notar que  $\tilde{I}_3$  se encuentra en el tercer cuadrante, por lo que su fase será  $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$ ).

Finalmente las intensidades instantáneas vienen dadas por

$$\begin{aligned}i_1(t) &= \frac{\sqrt{10}}{4} \cos(4 \times 10^4 t - 1,249) \text{ A} \\ i_2(t) &= \frac{\sqrt{10}}{2} \cos(4 \times 10^4 t + 0,291) \text{ A} \\ i_3(t) &= \frac{5\sqrt{2}}{4} \cos(4 \times 10^4 t + 5\pi/4) \text{ A} .\end{aligned}$$

## 5.6. Balance de potencia

### 5.6.1. Potencia media

Consideremos una rama de un circuito de CA caracterizada por una impedancia  $Z$  donde se han medido las siguientes tensión e intensidad instantáneas:

$$\begin{aligned}V(t) &= V_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t - \delta) ,\end{aligned}$$

siendo  $-\delta$  el ángulo de desfase entre la tensión y la intensidad (en el presente caso se ha tomado por sencillez la fase inicial de la tensión igual a cero, aunque este hecho no afecta a las conclusiones y resultados del presente apartado).

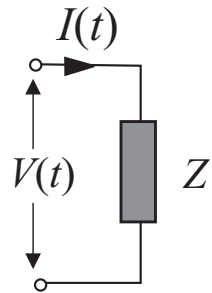
La potencia *instantánea*,  $P(t)$ , consumida en dicha rama vendrá dada por la siguiente expresión:

$$P(t) = I(t)V(t) = I_0 V_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \delta) , \quad (5.55)$$

donde debemos observar que dicha potencia es una función variable y *periódica* en el tiempo ( $T = 2\pi/\omega$ ). Debido al carácter variable y periódico de esta magnitud, la idea de “potencia consumida en el sistema” puede relacionarse más convenientemente con la **potencia media** en un periodo,  $P_{\text{med}}$ , cuya expresión será

$$P_{\text{med}} = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt . \quad (5.56)$$

La potencia media es justamente el valor que usualmente se proporciona al referirnos al consumo de cualquier aparato eléctrico. Esta magnitud nos da una idea clara de cómo se comporta el sistema puesto



que lo que ocurre en el intervalo “natural” de tiempo en el sistema (esto es, el periodo  $T$ ) determina el comportamiento del sistema en cualquier otro intervalo de tiempo mayor —éste será simplemente una repetición de lo que sucede en uno de los periodos. Así, por ejemplo, la energía,  $\Delta E$ , consumida en el sistema en un intervalo de tiempo  $\Delta t \gg T$  será muy aproximadamente

$$\Delta E \simeq P_{\text{med}} \Delta t .$$

Introduciendo (5.55) en (5.56) para obtener la potencia media tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\text{med}} &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \delta) dt \\ &= \frac{1}{T} I_0 V_0 \left[ \cos \delta \int_0^T \cos^2(\omega t) dt + \sin \delta \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \right] \end{aligned}$$

y dado que la segunda integral se anula mientras que la primera es  $\frac{1}{2}T$ , podemos concluir que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \delta = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \delta . \quad (5.57)$$

Potencia media consumida

Es interesante observar que, desde un punto de vista operativo, la potencia media podría haberse calculado igualmente mediante la siguiente expresión:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V} \tilde{I}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{V}^* \tilde{I}) , \quad (5.58)$$

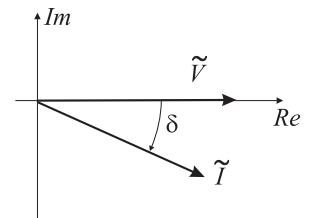
donde  $f^*$  significa *complejo conjugado* de  $f$ . Si tomamos las expresiones fasoriales correspondientes a la intensidad y tensión consideradas,

$$\tilde{I} = I_0 e^{-j\delta} \quad (5.59)$$

$$\tilde{V} = V_0 , \quad (5.60)$$

podemos comprobar que efectivamente

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_0 I_0 e^{-j\delta}) = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \delta . \quad (5.61)$$

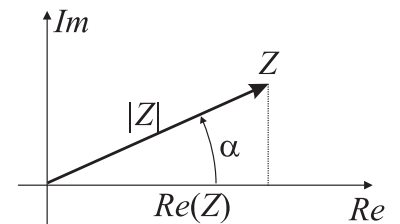


### 5.6.2. Factor de potencia

En la expresión (5.57) de la potencia media podemos apreciar que junto al producto de las amplitudes de la tensión e intensidad aparece un factor  $\cos \delta$  denominado **factor de potencia**. Este factor de máxima importancia práctica es determinante en el consumo/suministro de potencia en el sistema puesto que su valor está comprendido en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por ejemplo, en la resonancia donde el desfase entre la tensión y la intensidad es nulo, el factor de potencia es uno y consecuentemente el consumo de potencia es máximo. Por el contrario si el desfase entre la tensión y la intensidad fuese de  $\pi/2$  el consumo de potencia sería nulo.

El factor de potencia puede expresarse en términos de la impedancia  $Z$  de la rama, que podemos escribir como

$$Z = |Z| e^{j\alpha} .$$



Dado que en el presente caso la fase del fasor  $\tilde{V}$  es nula, la fase del fasor intensidad  $\tilde{I}$  será la opuesta a la fase de la impedancia, esto es,

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I_0 e^{-j\delta} \\ &= \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_0}{|Z|e^{j\alpha}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{-j\alpha},\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} \quad (5.62)$$

y

$$\delta = \alpha. \quad (5.63)$$

Teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = \text{Re}(Z)/|Z|$  y (5.63), el factor de potencia puede, por tanto, escribirse como

$$\cos \delta = \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|} \quad (5.64)$$

y, consecuentemente, la potencia media puede también expresarse como

$$P_{\text{med}} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \delta = I_{\text{ef}} |Z| I_{\text{ef}} \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|} = I_{\text{ef}}^2 \text{Re}(Z) \quad (5.65)$$

o expresiones equivalentes (en función de  $V_{\text{ef}}$ ).

### 5.6.3. Consumo de potencia

La expresión (5.65) indica que la potencia media consumida está directamente relacionada con la parte real de la impedancia. Si el sistema bajo estudio fuese un circuito “serie”, entonces la parte real de la impedancia vendría dada simplemente por la suma de las resistencias pero si el circuito fuese de otro tipo, la presencia de las partes reactivas del circuito (condensadores y bobinas) aparecerán explícitamente en la parte real de la impedancia. Evidentemente el consumo de potencia sólo se lleva a cabo en las resistencias (únicos elementos en los que tiene lugar efecto Joule) y no en las bobinas y condensadores. No obstante, esto no quiere decir que estos últimos elementos no influyan en el consumo de potencia, más bien habría que decir que la potencia se disipa en las resistencias pero que la presencia y disposición de bobinas y condensadores determina ciertamente cuánta potencia es disipada en estas resistencias.

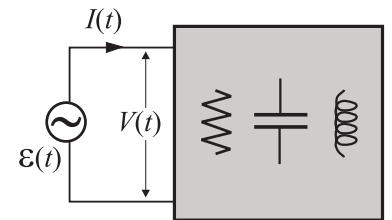
En el caso de un circuito alimentado por una fuente de tensión (ver figura adjunta), un análisis similar al del Apartado 5.6.1 nos dice que la potencia instantánea suministrada por el *generador* de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}(t)$ , que proporciona una corriente  $I(t)$ , viene dada por

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t), \quad (5.66)$$

por lo que la potencia media suministrada por dicho generador será

$$P_{\text{med}}^{\text{gen}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t)I(t) dt = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\mathcal{E}}\tilde{I}^*). \quad (5.67)$$

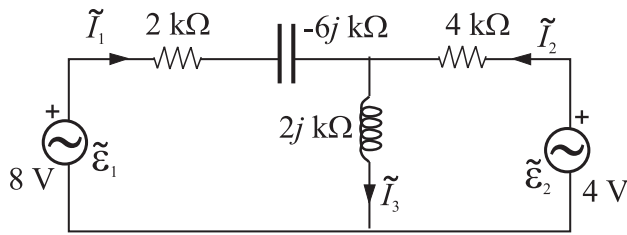
Dado que las potencias medias (5.67) y (5.57) representan físicamente la energía por periodo proporcionada por la fuente y la consumida en el circuito respectivamente, debe cumplirse que



Potencia media suministrada por un generador de fem

la suma de las potencias medias suministrada por los generadores debe ser igual a la suma de las potencias medias disipadas en las resistencias.

Ejemplo 5.2 En el circuito de la figura, comprobar que la potencia media suministrada por la fuente es igual a la suma de las potencias medias consumidas en las resistencias.



Teniendo en cuenta que  $\tilde{\mathcal{E}}_1 = 8$  y  $\tilde{\mathcal{E}}_2 = 4$ , tras resolver el circuito para obtener las intensidades fasoriales de rama obtendríamos que

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= 1 + j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_2 &= 1 - j \text{ mA} = \sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ mA} \\ \tilde{I}_3 &= 2 \text{ mA} .\end{aligned}$$

Los fasores tensión en las resistencias se obtienen simplemente multiplicando los correspondientes fasores intensidad por el valor de la resistencia, de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{2k\Omega} &= 2\sqrt{2} e^{j\pi/4} \text{ V} \\ \tilde{V}_{4k\Omega} &= 4\sqrt{2} e^{-j\pi/4} \text{ V} .\end{aligned}$$

La potencia media,  $P_{\text{med}}$ , consumida en cada una de las respectivas resistencias puede obtenerse según (5.58) resultando

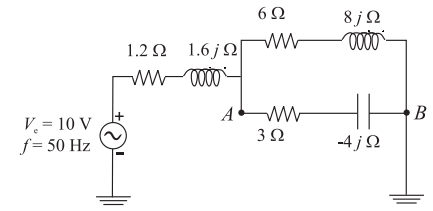
$$\begin{aligned}P_{\text{med}}(R = 2k\Omega) &= 2 \text{ mW} \\ P_{\text{med}}(R = 4k\Omega) &= 4 \text{ mW} .\end{aligned}$$

Análogamente la potencia media suministrada por cada una de las fuentes de fem será

$$\begin{aligned}P_{\text{med}}(\mathcal{E}_1) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \tilde{I}_1 \tilde{\mathcal{E}}_1^* \right) = 4 \text{ mW} \\ P_{\text{med}}(\mathcal{E}_2) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \tilde{I}_2 \tilde{\mathcal{E}}_2^* \right) = 2 \text{ mW} .\end{aligned}$$

Obtenemos que la potencia media total suministrada por las fuentes coincide con la potencia media total consumida en las resistencias.

**Ejemplo 5.3** En el circuito de la figura, calcular: (1) la intensidad (instantánea y eficaz) que circula por la fuente; (2) la potencia media consumida por el circuito; (3) el equivalente Thevenin entre los puntos  $A$  y  $B$ ; y (4) la energía almacenada por la bobina de reactancia inductiva  $X_L = 1,6 \Omega$  en un instante  $t$ .



1. Para calcular el fasor intensidad,  $\tilde{I}$ , que circula por la fuente, podemos calcular en primer lugar la impedancia,  $Z$ , en serie con dicha fuente. Para ello notemos que

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{6 + j8} + \frac{1}{3 - j4} = 0,18 + j0,08 = 0,2 e^{j0,418},$$

por lo que

$$Z_{AB} = 4,6 - j2 = 5 e^{-j0,418}$$

y, por consiguiente, encontramos que

$$Z = (1,2 + j1,6) + (4,6 - j2) = 5,8 - j0,4 = 5,8 e^{-j0,069}.$$

Ahora podremos calcular el fasor intensidad a partir de

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{Z} = \frac{10}{5,8 e^{-j0,069}} = 1,72 e^{j0,069},$$

de donde finalmente obtenemos que

$$I_e = 1,72 \text{ A}$$

$$I(t) = 2,43 \cos(100\pi t + 0,069) \text{ A},$$

recordando que la amplitud de la intensidad instantánea,  $I_0$ , vendrá dada por  $I_0 = I_e \sqrt{2}$ .

2. Teniendo en cuenta que la potencia media consumida en el circuito será idéntica a la proporcionada por la fuente de fem, usando la expresión (5.67), tenemos que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\mathcal{E}} \tilde{I}^*) = 10 \times 1,72 \times \cos(0,069) = 17,16 \text{ W}.$$

3. Para calcular el equivalente es quizás conveniente dibujar el circuito original en la forma mostrada en la figura adjunta. Así para calcular la impedancia Thevenin,  $Z_{\text{TH}}$ , tendremos que calcular la impedancia equivalente a las tres ramas en paralelo resultantes tras cortocircuitar la fuente de fem, esto es,

$$\frac{1}{Z_{\text{TH}}} = \frac{1}{4,6 - j2} + \frac{1}{1,2 + j1,6},$$

que tras operar nos da

$$Z_{\text{TH}} = 1,43 + j0,95 = 1,72 e^{j0,588}.$$

Para obtener el fasor de tensión Thevenin,  $\tilde{V}_{\text{TH}}$ , notemos que debido a que las tres ramas están en paralelo

$$\tilde{V}_{\text{TH}} = \tilde{V}_{AB} = Z_{AB} \tilde{I} = 8,6 e^{-j0,349},$$

resultado que también podría haberse obtenido si consideramos que

$$\tilde{V}_{\text{TH}} = \tilde{\mathcal{E}} - (1,2 + j1,6) \tilde{I}.$$

4. Para calcular la energía instantánea almacenada en la bobina debemos usar la siguiente expresión:

$$U_m(t) = \frac{1}{2} L I^2(t),$$

que al operar nos da

$$\begin{aligned} U_m(t) &= \frac{1}{2} \frac{1,6}{100\pi} [1,72 \sqrt{2} \cos(100\pi t + 0,069)]^2 \\ &= 0,015 \cos^2(100\pi t + 0,069) \text{ J}. \end{aligned}$$

